PART3　円のベクトル方程式

例題

平面上の定点 $A(\vec{a})$ と動点 $P(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　(2) $|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

Point Pickup

練習

平面上の異なる２つの定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　　(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

第13講　PART3 確認問題

1　平面上の定点 $A(\vec{a})$ と動点 $P(\vec{p})$ に対し，ベクトル方程式 $|2\vec{p}-\vec{a}|=6$ の表す図形は円であり，この円の中心は [ア]，半径は [イ] である。

[ア] は，次の①～④のうちから選べ。

① 線分 OA の中点
② 線分 OA を 2：1 に内分する点
③ 線分 OA を 1：2 に内分する点
④ 線分 OA を 2：1 に外分する点

2　平面上の異なる 2 つの定点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ と動点 $P(\vec{p})$ に対し，ベクトル方程式 $|2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}|=10$ は，

$$\left|\vec{p}-\frac{[\text{ウ}]\vec{a}+[\text{エ}]\vec{b}}{[\text{オ}]}\right|=[\text{カ}]$$

と表すことができるので，この方程式の表す図形は，線分 AB を [キ]：[ク] に内分する点を中心とする半径 [ケ] の円である。

PART3　円のベクトル方程式

例題

平面上の定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

(1)　点 A を中心とする半径 1 の円

(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$ より　$3\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=6$

すなわち　$\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=2$

よって，線分 OA を 2：1 に内分する点を中心とする半径 2 の円

練習

平面上の異なる２つの定点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ と動点 $P(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2)　$|3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|=5$

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　より　　$2\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=3$

すなわち　$\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=\frac{3}{2}$

よって，線分 OA の中点を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円

(2)　$|3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|=5$　より

$|3(\vec{p}-\vec{a})+2(\vec{p}-\vec{b})|=5$

$|5\vec{p}-(3\vec{a}+2\vec{b})|=5$

つまり　$\left|\vec{p}-\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right|=1$

よって，線分 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円

第13講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：3

[解説]

$$|2\vec{p}-\vec{a}|=6$$

$$\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=3 \quad \text{[A]}$$

ここで，$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}$ とすると，点 B は線分 OA の中点である。

よって，求める円の中心は**線分 OA の中点**であり，半径は **3** である。

> [A]　中心 $C(\vec{c})$，半径 r の円のベクトル方程式は，
> $|\vec{p}-\vec{c}|=r$

2

[正解] ウ：2，エ：3，オ：5，カ：2，キ：3，ク：2，ケ：2

[解説]

$|2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}|=10$　より

$$|2(\vec{p}-\vec{a})+3(\vec{p}-\vec{b})|=10 \quad \text{[B]}$$

$$|5\vec{p}-(2\vec{a}+3\vec{b})|=10$$

$$\left|\vec{p}-\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}\right|=2$$

ここで，$\overrightarrow{OC}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ とすると，点 C は線分 AB を 3：2 に内分する点である。 [C]

よって，求める図形は，

　線分 AB を **3：2** に内分する点を中心とする半径 **2** の円である。

> [B]　方程式を $\vec{p}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す。

> [C]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$